МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГАОУ ВО «МГТУ»)

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине

Теоретическая механика

(для всех специальностей и форм обучения)

Разработчик Челтыбашев А.А., доцент

Оглавление

1 РГР №1 «Равновесие плоской системы сил».

К раме (рис. С.1-С.30) приложены две сосредоточенные силы, распределенная нагрузка и пара сил с моментом $M = 40$ кН $\cdot$ м. Значение сил, их точки приложения и участок на котором действует распределенная нагрузка, указаны в таблице 1.1. Расстояние $a = 1{,}5$ м. Считая, что система находится в равновесии определить реакции опор в трех случаях:

п.1: В точках A и B наложены связи, как указано на рис.

п.2: В точке B жесткая заделка.

п.3: Рама состоит из двух частей шарнирно скрепленных в точке C, в точках A и B связи в виде неподвижных шарнирных опор.

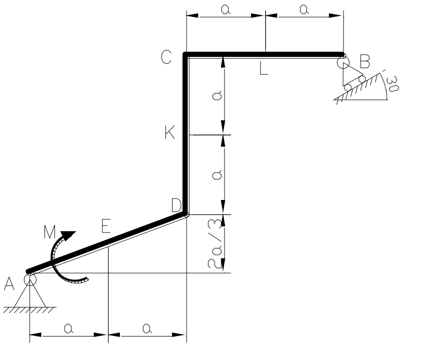


Рис. С.1

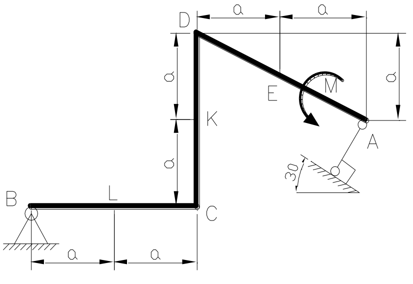


Рис. С.2

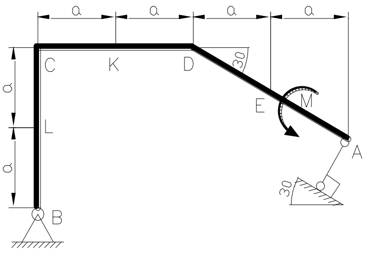


Рис. С.3

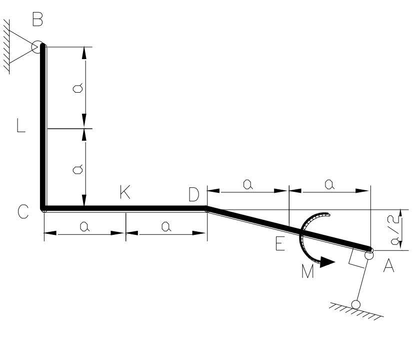


Рис. С.4

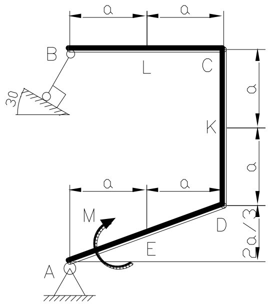


Рис. С.5

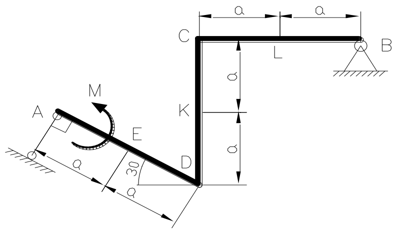


Рис. С.6

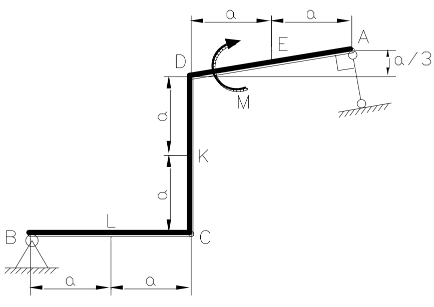


Рис. С.7

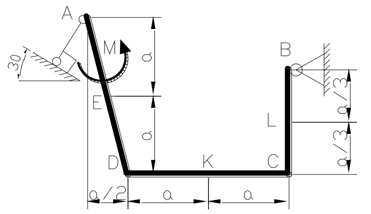


Рис. С.8

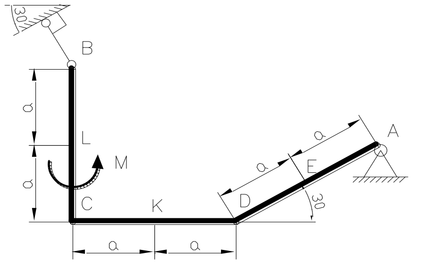


Рис. С.9

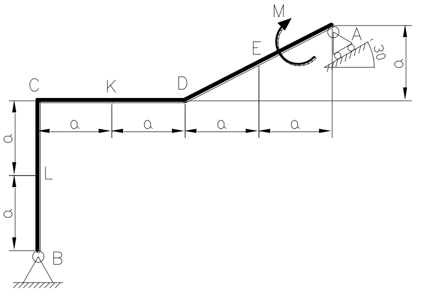


Рис. С.10

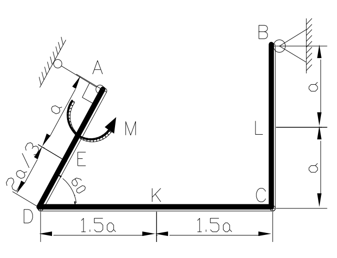


Рис. С.11

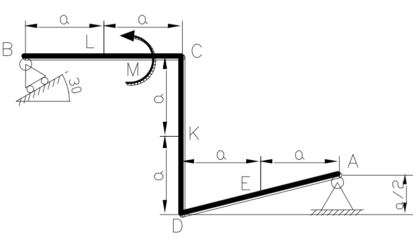


Рис. С.12

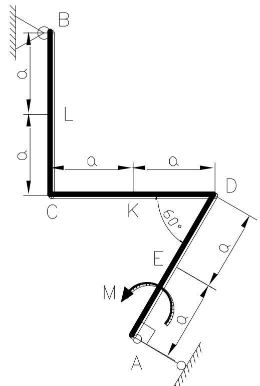


Рис. С.13

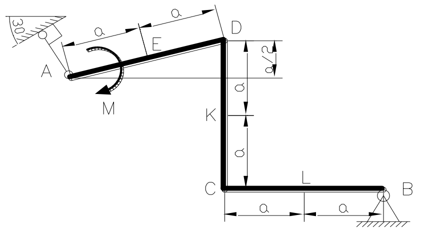


Рис. С.14

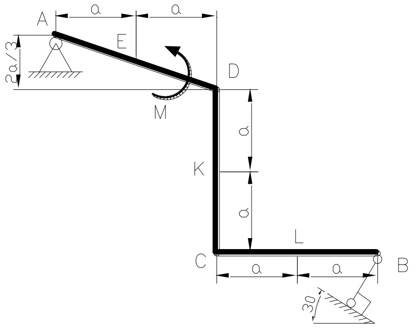


Рис. С.15

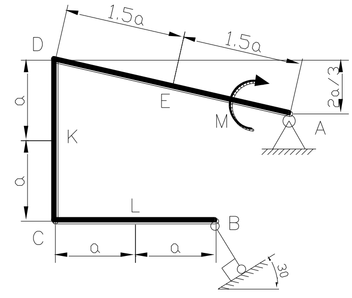


Рис. С.16

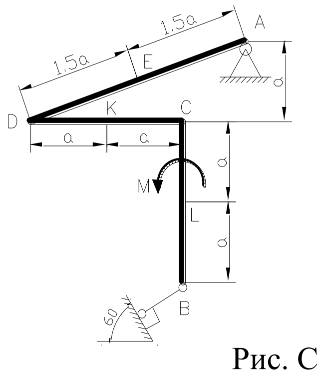


Рис. С.17

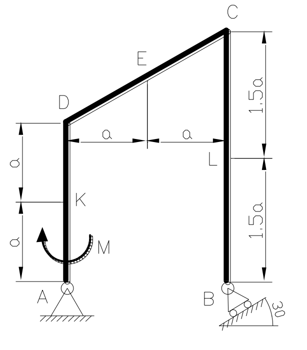


Рис. С.18

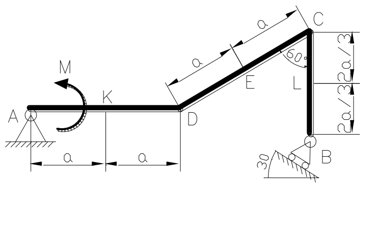


Рис. С.19

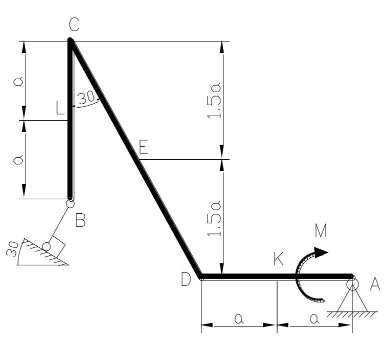


Рис. С.20

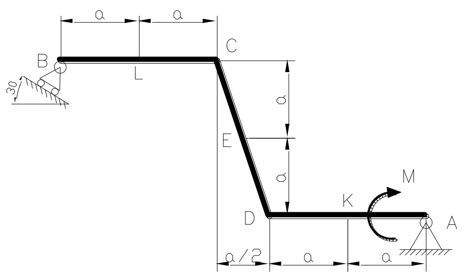


Рис. С.21

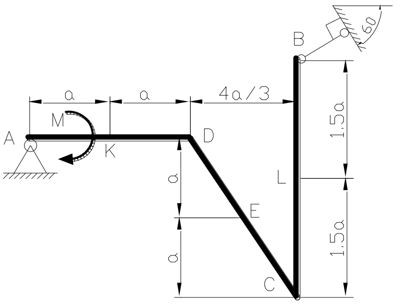


Рис. С.22

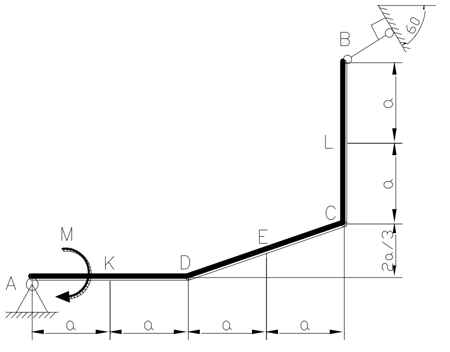


Рис. С.23

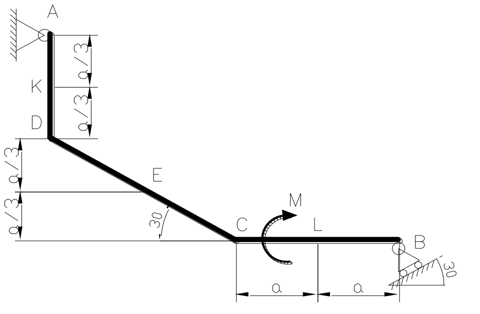


Рис. С.24

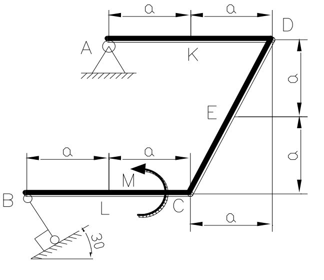


Рис. С.25

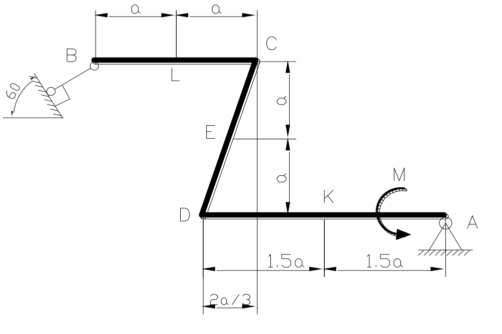


Рис. С.26

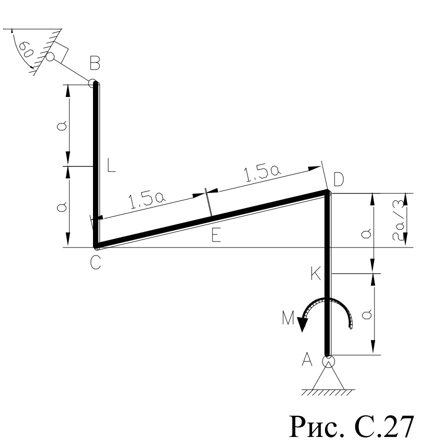


Рис. С.27

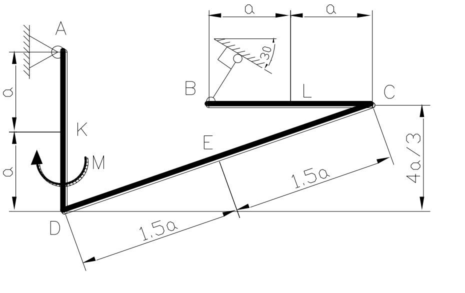


Рис. С.28

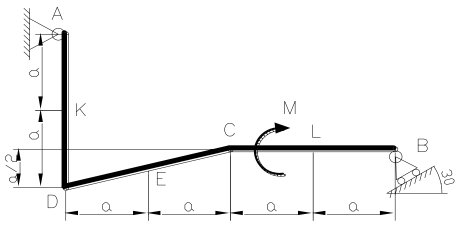


Рис. С.29

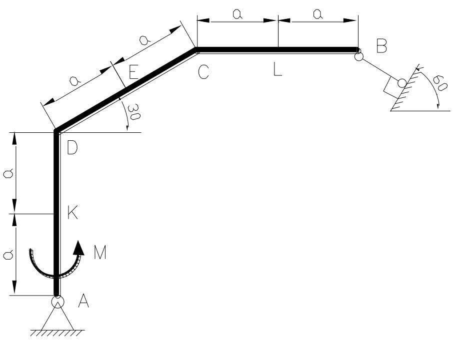


Рис. С.30

Таблица 1.1

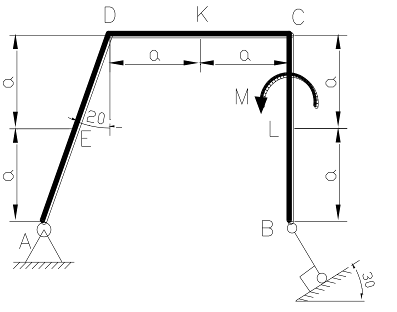
№ п/п	Распределенная нагрузка q, кН/м				Сила F_1, кН			Сила F_2, кН		
	вид	значение	участок схемы 1-17	участок схемы 18-30	значение	Точка приложения	угол	значение	Точка приложения	угол
1.		8	AD	DC	-15	K	60	20	L	30
2.		12	DC	AD	15	E	0	20	L	-30
3.		12	CB	CB	15	E	0	-20	K	60
4.		12	AD	DC	20	K	-30	18	L	45
5.		10	DC	AD	20	E	0	-18	L	-60
6.		10	CB	CB	20	E	0	18	K	45
7.		14	AD	DC	17	K	45	-23	L	30
8.		14	DC	AD	-17	E	0	23	L	45
9.		14	CB	CB	-17	E	0	23	K	-30
10.		8	ED	EC	-17	K	30	-23	L	-60

Примечания: 1. Если значение силы указано с положительным знаком, то ее следует прикладывать сверху вниз или слева направо, в зависимости от положения участка, и снизу вверх или справа налево, если значение силы дано с отрицательным знаком.

2. Угол следует отсчитывать от нормали к поверхности в данной точке, причем по ходу часовой стрелки, если значение угла дано с отрицательным знаком и против хода часовой стрелки, если значение угла дано с положительным знаком.

1.1 Пример решения РГР №1.

Исходные данные:



q, кН/м			Сила F_1, кН			Сила F_2, кН		
вид	значение	участок	значение	точка приложения	угол	значение	точка приложения	угол
[image]	12	DC	-15	E	0	20	L	30

$M = 40$ кН$\cdot$м, $a = 1{,}5$ м.

Считая, что система находится в равновесии определить реакции опор в трех случаях:

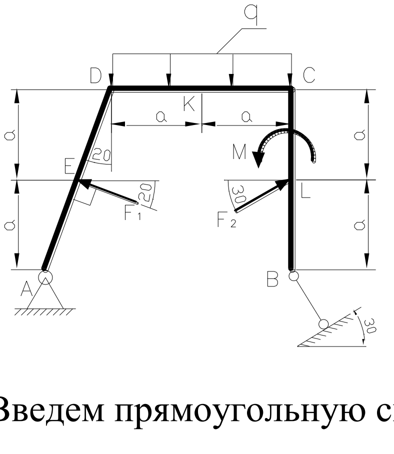
п.1: В точках A и B наложены связи, как указано на рис.

п.2: В точке B жесткая заделка.

п.3: Рама состоит из двух частей шарнирно скрепленных в точке C, в точках A и B связи в виде неподвижных шарнирных опор.

Решение:

п.1. Обозначим силы и распределенную нагрузку согласно данным:



Введем прямоугольную систему координат с осями X, Y.

Заменим связи их реакциями. В точке A наложена связь в виде неподвижного шарнира, направление реакция которого заранее неизвестно, поэтому раскладываем её на две взаимно перпендикулярные составляющие X_A, Y_A. В точке B – невесомый стержень, реакция R_B которого направлена вдоль оси стержня.

Для удобства разложим силы F_1, F_2 вдоль осей X, Y.

$$F_{1x} = F_1 \cos 20^\circ, \quad F_{1y} = F_1 \sin 20^\circ,$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 30^\circ, \quad F_{2y} = F_2 \sin 30^\circ.$$

Подставляя значения, найдем:

$$F_{1x} = 14{,}095 \text{ кН}, \;\; F_{1y} = 5{,}13 \text{ кН}, \;\; F_{2x} = 17{,}321 \text{ кН}, \;\; F_{2y} = 10 \text{ кН}.$$

Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой Q, которая будет приложена посередине участка DC и числено равна:

$$Q = q \cdot 2a, \;\; Q = 36 \text{ кН}.$$

Получившаяся схема изображена на рис. 1.1.

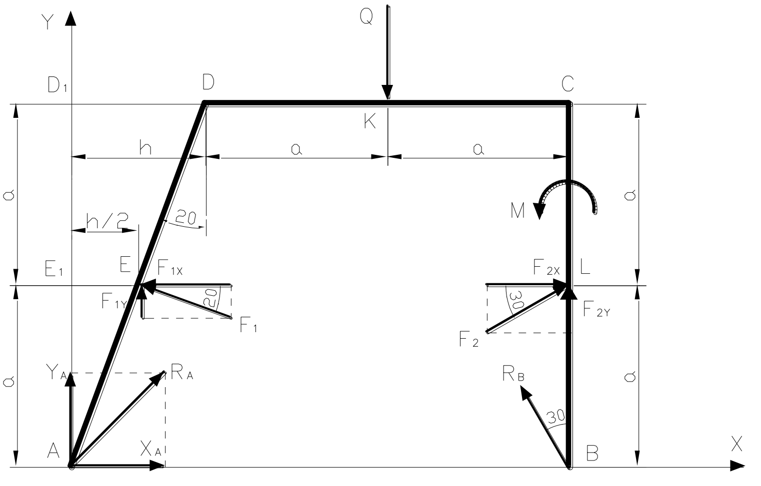


Рис. 1.1

Рассмотрим треугольники AEE_1 и ADD_1, эти треугольники подобны по трем углам, следовательно:

$$\frac{AE_1}{AD_1} = \frac{EE_1}{DD_1} = \frac{1}{2}.$$

Обозначим $DD_1 = h$, значит $EE_1 = h/2$.

Найдем расстояние h из треугольника ADD_1:

$$h = 2a \cdot \operatorname{tg} 20^\circ, \;\; h = 1{,}092 \text{ м}.$$

Составим теперь уравнения равновесия, которые для плоской системы сил имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \;\; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \;\; \sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

В данном случае они запишутся:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = X_A - F_{1x} + F_{2x} - R_B \cdot \sin 30^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} = Y_A + F_{1y} - Q + F_{2y} + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0, \\ \sum M_A(\vec{F}_k) = F_{1y} \cdot h/2 + F_{2x} \cdot a - Q \cdot (a+h) + M - F_{2x} \cdot a + \\ \qquad + F_{2y} \cdot (2a+h) + R_B \cdot (2a+h) \cdot \cos 30^\circ = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными X_A, Y_A, R_B. Из последнего уравнения системы выразим R_B:

$$R_B = \frac{-F_{1y} \cdot h/2 - F_{2x} \cdot a + Q \cdot (a+h) - M + F_{2x} \cdot a - F_{2y} \cdot (2a+h)}{(2a+h) \cdot \cos 30^\circ},$$

производя расчеты, найдем:

$$R_B = 4,07 \text{ кН}.$$

Из первого уравнения системы (1.1) найдем X_A:

$$X_A = F_{1x} - F_{2x} + R_B \cdot \sin 30^\circ, \quad X_A = -1,19 \text{ кН.}$$

Знак минус говорит о том, что направлен X_A в сторону противоположную, указанной на рисунке.

Из второго уравнения (1.1) находим:

$$Y_A = -F_{1y} + Q - F_{2y} - R_B \cdot \cos 30^\circ, \quad Y_A = 17,34 \text{ кН.}$$

Вспоминая, что X_A, Y_A составляющие реакции R_A, найдем:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad R_A = 17,38 \text{ кН.}$$

Итак, реакции равны: $R_A = 17,38$ кН, $R_B = 4,07$ кН.

Сделаем проверку. Для этого составим уравнение равновесия моментов относительно точки, через которую не проходят линии действия искомых сил, в качестве этой точки выберем точку *E*.

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot h/2 + X_A \cdot a - Q \cdot (a + h/2) + M + F_{2y} \cdot (2a + h/2) +$$
$$+ R_B \cdot (2a + h/2) \cdot \cos 30^\circ - R_B \cdot a \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$-0,00056 \approx 0.$$

Небольшая неточность связана с округлениями при расчетах. Можно считать, что проверка сошлась и реакции найдены верно.

п.2. Прейдем к второму пункту задачи. Теперь опора одна, в виде жесткой заделки в точке *B*. Исходная система имеет вид:

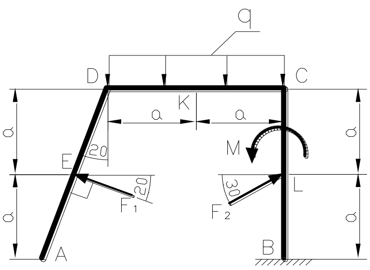


Схема нагружения осталась прежней, значит найденные нами в п.1 $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, Q$ и h будут такие же. Введем систему координат. В жесткой заделке возникает сила реакции заранее неизвестного направления R_B, которую раскладываем на две взаимно перпендикулярные составляющие X_B, Y_B, и пара сил с моментом M_B, в итоге получим следующую систему сил (рис. 1.2).

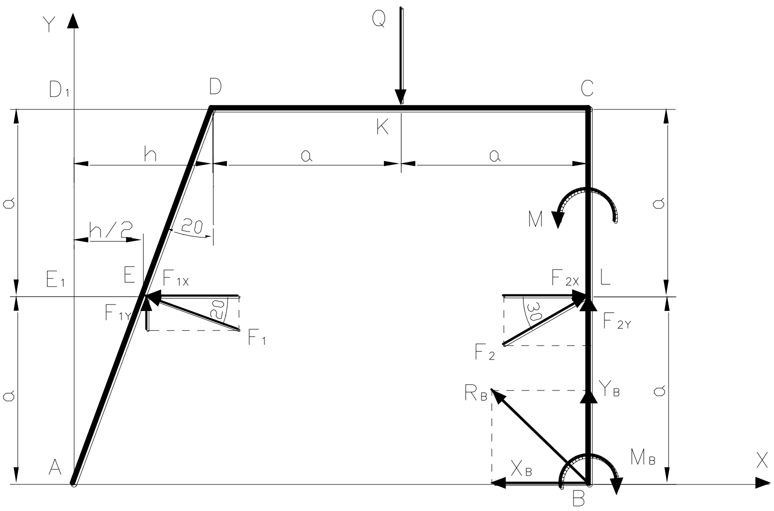


Рис. 1.2

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = -F_{1x} + F_{2x} - X_B = 0, \\ \sum F_{ky} = F_{1y} - Q + F_{2y} + Y_B = 0, \\ \sum M_B(\vec{F}_k) = -M_B - F_{2x} \cdot a + M + Q \cdot a + F_{1x} \cdot a - F_{1y} \cdot (2a + h/2) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными X_B, Y_B, M_B, причем в каждое уравнение входит только одно неизвестное, поэтому последовательно выражаем X_B, Y_B, M_B:

$$\begin{cases} X_B = -F_{1x} + F_{2x}, \\ Y_B = -F_{1y} + Q - F_{2y}, \\ M_B = -F_{2x} \cdot a + M + Q \cdot a + F_{1x} \cdot a - F_{1y} \cdot (2a + h/2) = 0. \end{cases}$$

и подставляя числовые значения, находим:

$$X_B = 3{,}22 \text{ кН}, \;\; Y_B = 20{,}87 \text{ кН}, \;\; M_B = 70{,}97 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Учитывая, что X_B, Y_B составляющие R_B, найдем:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}, \;\; R_B = 21{,}12 \text{ кН}.$$

Итак, искомые реакции:

$$R_B = 21{,}12 \text{ кН}, \;\; M_B = 70{,}97 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Произведем проверку, для этого составим уравнения равновесия моментов относительно точки E:

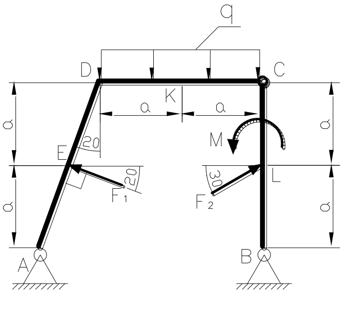
$$\sum M_E(\vec{F}_k) = -Q \cdot (a + h/2) + M + F_{2y} \cdot (2a + h/2) - M_B +$$
$$+ Y_B \cdot (2a + h/2) - X_B \cdot a = 0.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$0{,}0092 \approx 0.$$

Можно считать, что проверка сошлась и реакции определены верно.

п.3. Рама состоит из двух частей шарнирно скрепленных в точке C, в точках A и B связи в виде неподвижных шарнирных опор. Значения $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, Q$ и h будут такие же, как в пункте 1. Исходная схема в этом случае будет выглядеть следующим образом:



Заменим опоры в точках A и B их реакциями R_A и R_B которые раскладываем на составляющие X_A, Y_A и X_B, Y_B. Если рассматривать равновесие всей системы целиком то для определения четырех неизвестных реакций трех уравнений равновесия для плоской системы сил будет недостаточно.

Для решения задачи мысленно разделим конструкцию по шарниру, через который передается усилие неизвестного направления. Разложим это усилие на составляющие X_C, Y_C, которые согласно третьему закону Ньютона будут действовать и на левую и на правую часть, причем будут равны по модулю и противоположны по направлению. С учетом этого, наша схема примет вид (рис. 1.3).

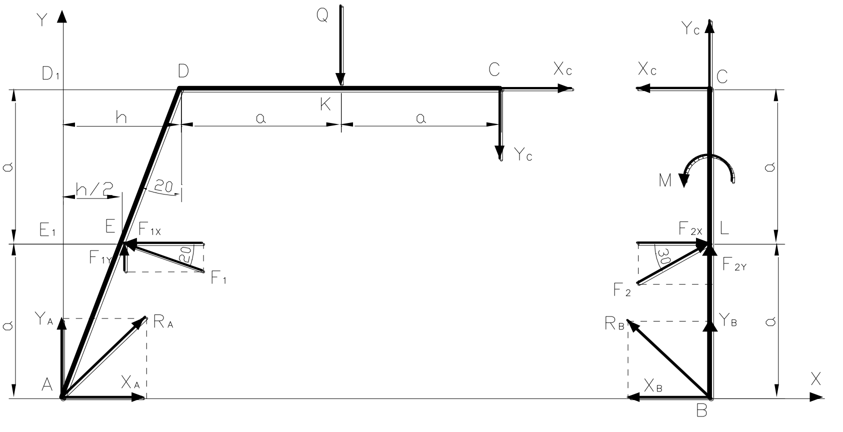


Рис. 1.3

Составим, теперь уравнения равновесия для каждой части.

Для левой части:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = X_A - F_{1x} + X_C = 0, \\ \sum F_{ky} = Y_A + F_{1y} - Q - Y_C = 0, \\ \sum M_A(\vec{F}_k) = F_{1y} \cdot h/2 + F_{1x} \cdot a - Q \cdot (a+h) - X_C \cdot 2a - Y_C \cdot (2a+h) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Для правой части:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = -X_B + F_{2x} - X_C = 0, \\ \sum F_{ky} = Y_B + F_{2y} + Y_C = 0, \\ \sum M_B(\vec{F}_k) = -F_{2x} \cdot a + M + X_C \cdot 2a = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Получили систему шести уравнений с шестью неизвестными $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$. Из последнего уравнения (1.4) находим X_C:

$$X_C = \frac{F_{2x} \cdot a - M}{2a}, \quad X_C = -4.67 \text{ кН}.$$

Подставив найденное значение в третье уравнение (1.3) найдем Y_C:

$$Y_C = \frac{F_{1y} \cdot h/2 + F_{1x} \cdot a - Q \cdot (a+h) - X_C \cdot 2a}{(2a+h)}, \quad Y_C = -13.52 \text{ кН}.$$

Знак минус у X_C, Y_C означает, что они направлены в сторону, противоположную указанной на рисунке.

Теперь подставив X_C, Y_C в первые два уравнения (1.3) и первые два уравнения (1.4) найдем X_A, Y_A, X_B, Y_B:

$$X_A = F_{1x} - X_C, \quad X_A = 18.77 \text{ кН},$$

$$Y_A = -F_{1y} + Q + Y_C, \quad Y_A = 17{,}34 \text{ кН},$$

$$X_B = F_{2x} - X_C, \quad X_B = 21{,}99 \text{ кН},$$

$$Y_B = -F_{2y} - Y_C,\ \ Y_B = 3{,}52\ \text{кН}.$$

Найдем R_A, R_B:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2},\ \ R_A = 25{,}55\ \text{кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2},\ \ R_B = 22{,}27\ \text{кН}.$$

Искомые реакции: $R_A = 25{,}55$ кН, $R_B = 22{,}27$ кН.

Для проверки составим уравнение равновесия моментов для всей конструкции относительно точки E:

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot h/2 + X_A \cdot a - Q \cdot (a + h/2) + M + F_{2y} \cdot (2a + h/2) +$$
$$+ Y_B \cdot (2a + h/2) - X_B \cdot a = 0.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$-0{,}001 \approx 0.$$

Следовательно, реакции найдены правильно.

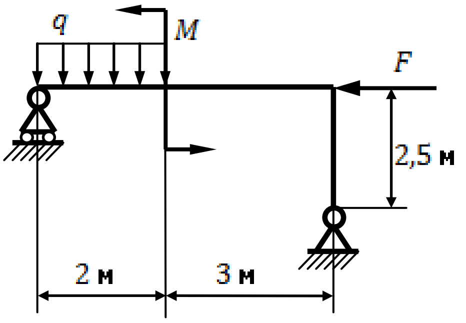
<u>Ответ</u>: п.1: $R_A = 17{,}38$ кН, $R_B = 4{,}07$ кН,

п.2: $R_B = 21{,}12$ кН, $M_B = 70{,}97$ кН·м,

п.3: $R_A = 25{,}55$ кН, $R_B = 22{,}27$ кН.

1.2 Примерный перечень вопросов для защиты РГР №1

1. Что называют связью?
2. Изобразите шарнирно-неподвижную опору и укажите реакции, возникающие в опоре.
3. Изобразите шарнирно-подвижную опору и укажите реакции, возникающие в опоре.
4. Изобразите жесткую заделку и укажите реакции, возникающие в заделке.
5. Изобразите невесомый стержень и укажите реакции, возникающие в стержне.
6. Как вычисляется алгебраический момент силы? Правило знаков.
7. Что называется плечом силы?
8. Что называется парой сил?
9. Какие силы называют распределенными?
10. Запишите условия равновесия плоской системы сил.
11. Определите реакции опор. $M = 40$ кН м, $q = 10\,\frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $F = 20$ кН.


q
M
F
2,5 м
2 м
3 м

2 РГР №2 «Плоскопараллельное движение».

Плоский механизм (рис. К.1-К.30) состоит из стержней, ползуна и ступенчатого колеса. Ведущим является звено 1. Точки D и K лежат в середине соответствующего стержня. Длины стержней, радиусы ступенчатого колеса (внешний R, внутренний r), угловая скорость и угловое ускорение звена 1 приведены в таблице 2.1.

Определить скорости точек A, B, C, D, E, K, N, H с помощью мгновенного центра скоростей; угловые скорости звеньев 2, 3, 4, 5; ускорение точки B и угловое ускорение звена AB.

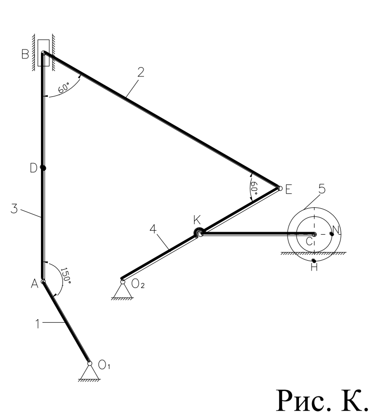


Рис. К.1

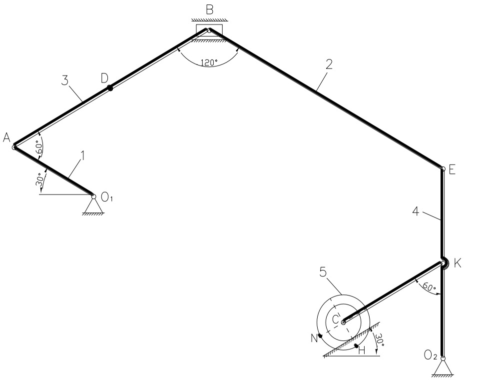


Рис. К.2

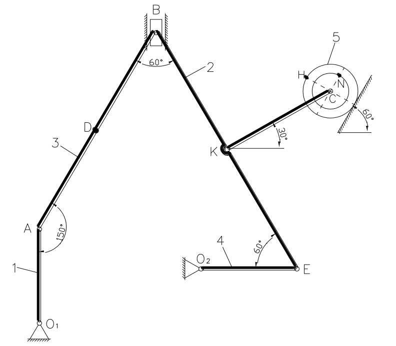


Рис. К.3

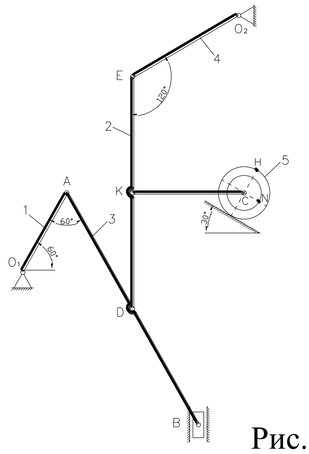


Рис. К.4

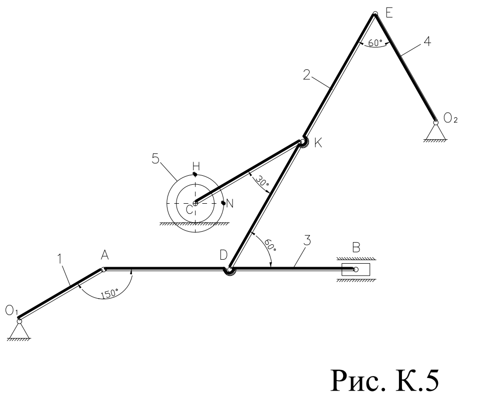


Рис. К.5

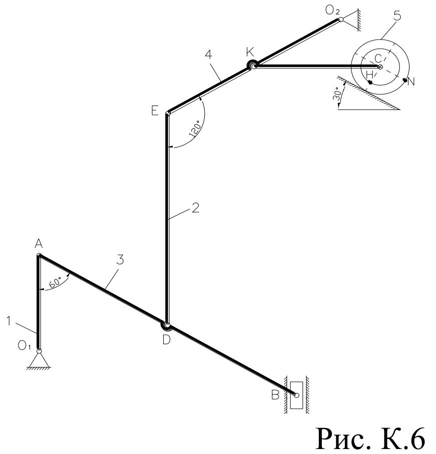


Рис. К.6

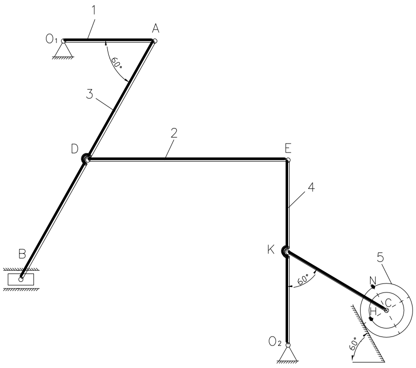


Рис. К.7

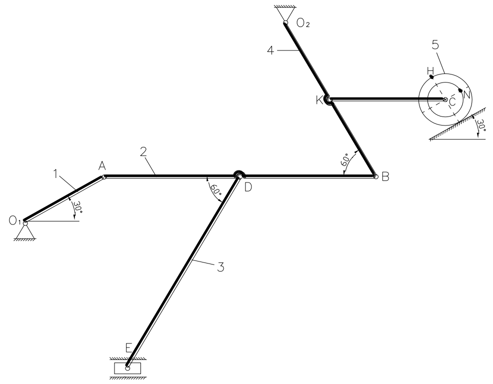


Рис. К.8

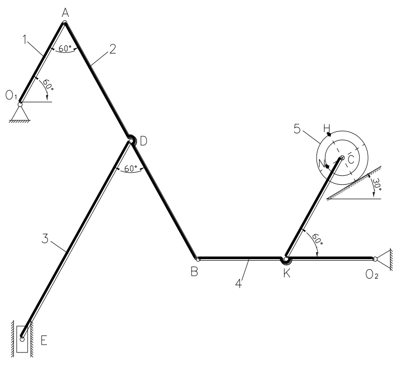


Рис. К.9

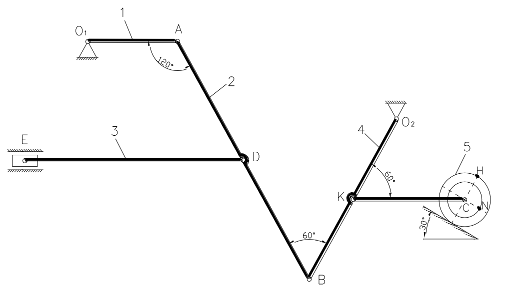


Рис. К.10

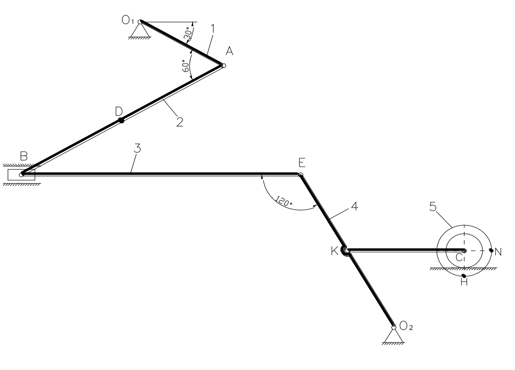


Рис. К.11

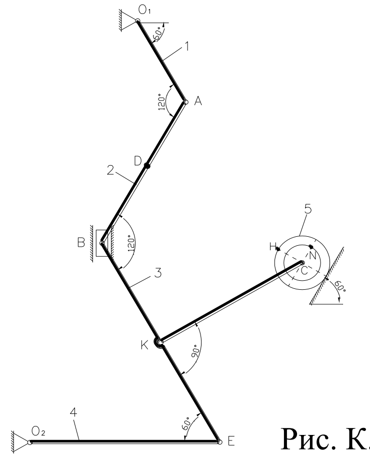


Рис. К.12

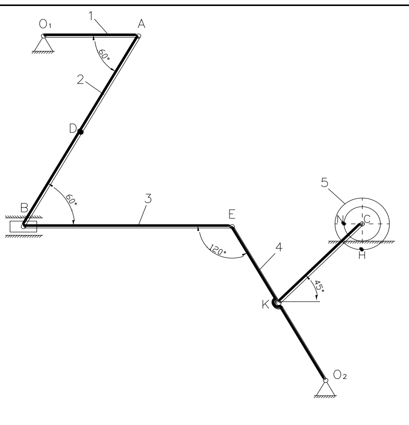


Рис. К.13

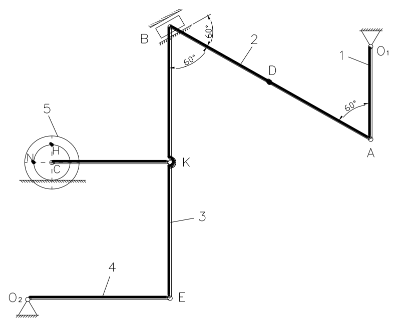


Рис. К.14

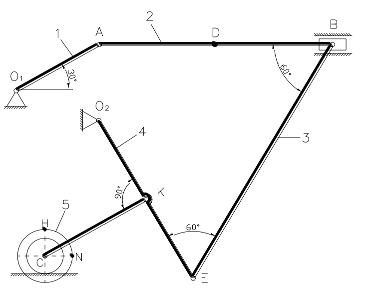


Рис. К.15

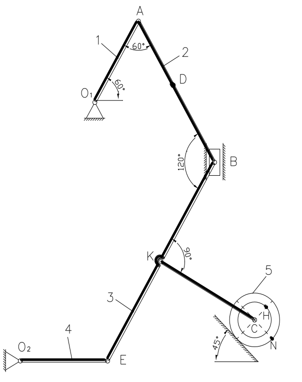


Рис. К.16

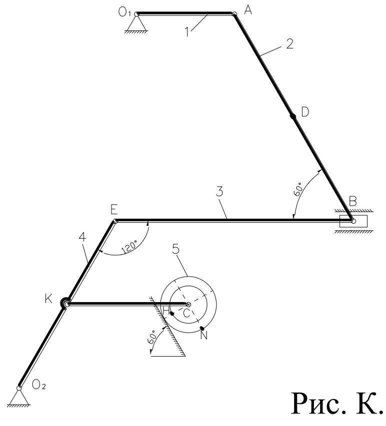


Рис. К.17

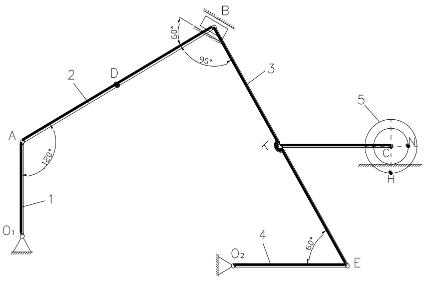


Рис. К.18

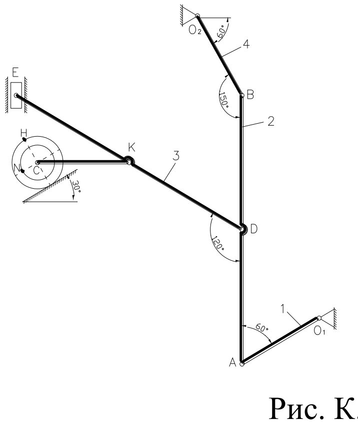


Рис. К.19

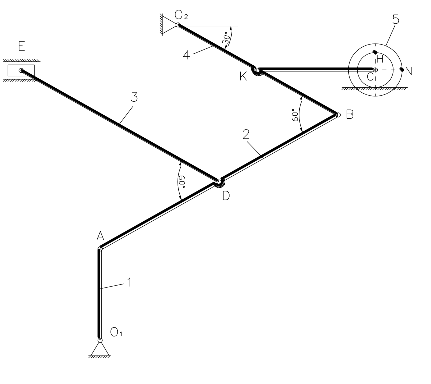


Рис. К.20

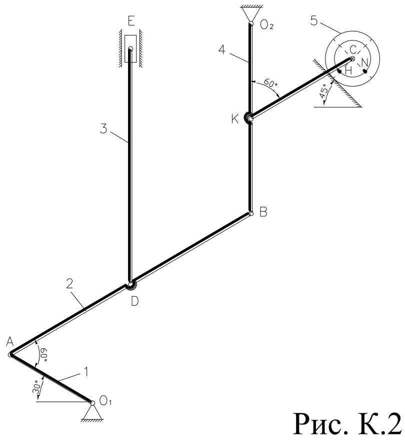


Рис. К.21

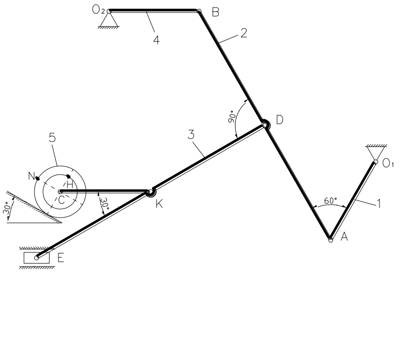


Рис. К.22

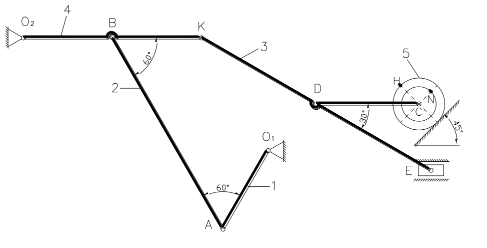


Рис. К.23

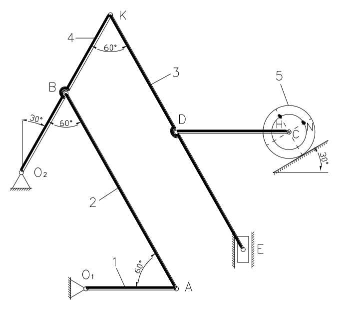


Рис. К.24

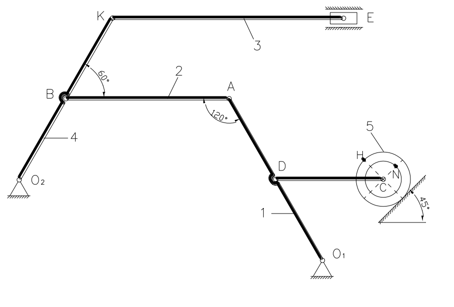


Рис. К.25

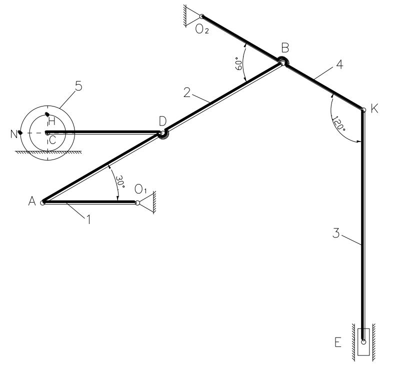


Рис. К.26

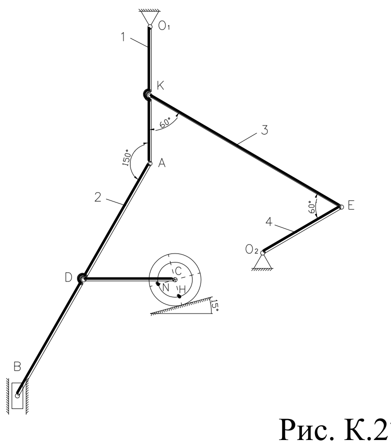


Рис. К.27

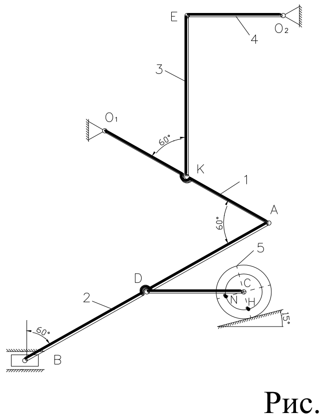


Рис. К.28

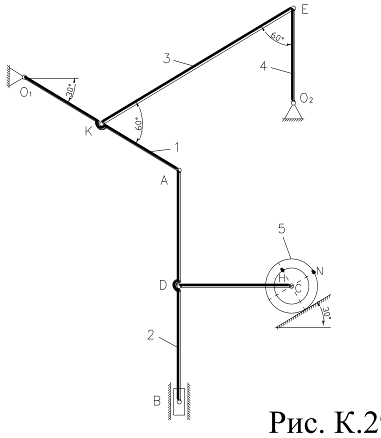


Рис. К.29

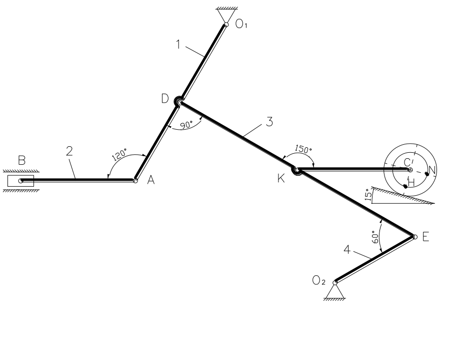


Рис. К.30

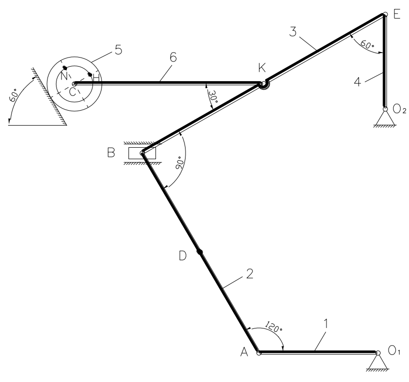
Таблица 2.1

№ п/п	l_1, м	l_2, м	l_3, м	l_4, м	r_5, м	R_5, м	ω_1, c^{-1}	ε_1, c^{-1}
1.	0,4	1,2	1,4	0,8	0,1	0,2	6	4
2.	0,6	1,6	2,0	1,2	0,15	0,2	5	-2
3.	0,8	2,6	3,0	1,4	0,2	0,3	-3	5
4.	1,0	3,0	3,8	1,8	0,3	0,5	2	3
5.	1,2	3,4	4,0	2,2	0,2	0,5	-4	-1
6.	0,4	1,0	1,4	0,6	0,1	0,3	7	-6
7.	0,6	1,8	2,2	1,0	0,15	0,4	4	5
8.	0,8	2,2	2,8	1,6	0,2	0,25	-2	4
9.	1,0	3,2	3,6	2,0	0,25	0,4	3	2
10.	1,2	3,6	4,4	2,6	0,35	0,5	-5	-3

Примечание: Если значение угловой скорости или углового ускорения дано с положительным знаком, то направление для них следует выбирать против хода часовой стрелки, если же с отрицательным, то – по ходу часовой стрелки.

2.1 Пример решения РГР №2.

Исходные данные:



l_1, м	l_2, м	l_3, м	l_4, м	r_5, м	R_5, м	ω_1, c^{-1}	ε_1, c^{-1}
0,5	1,0	1,2	0,4	0,08	0,12	8	-2

Определить скорости точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *K*, *N*, *H* с помощью мгновенного центра скоростей; угловые скорости звеньев 2, 3, 4, 5; ускорение точки *B* и угловое ускорение звена *AB*.

Решение: Изображаем схему, соблюдая масштаб, и направляем угловую скорость и угловое ускорение звена 1 (рис.2.1).

Так как звено 1 совершает вращательное движение вокруг точки O_1, то скорость точки *A* будет направлена перпендикулярно O_1A, в соответствии с направлением угловой скорости, а численное значение скорости точки *A*, равно:

$$v_A = \omega_1 \cdot l_1, \;\; v_A = 8 \cdot 0{,}5 = 4 \text{ м/с}.$$

Скорость точки *B*, которая помимо звеньев 2 и 3 принадлежит ползуну совершающему поступательное движение, направлена параллельно направляющим ползуна.

Чтобы найти направление скорости точки *D* и численное значение скоростей $\vec{v}_B, \vec{v}_D$ построим для звена 2 мгновенный центр скоростей (МЦС). Для этого проведем перпендикуляры к скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ на пересечении которых получим точку P_2 – МЦС звена 2.

Теперь движение звена 2 в данный момент времени можно рассматривать как вращательное вокруг P_2 с угловой скоростью ω_2. Скорость точки *D* будет направлена перпендикулярно P_2D в соответствии с направлением вращения звена 2 вокруг P_2.

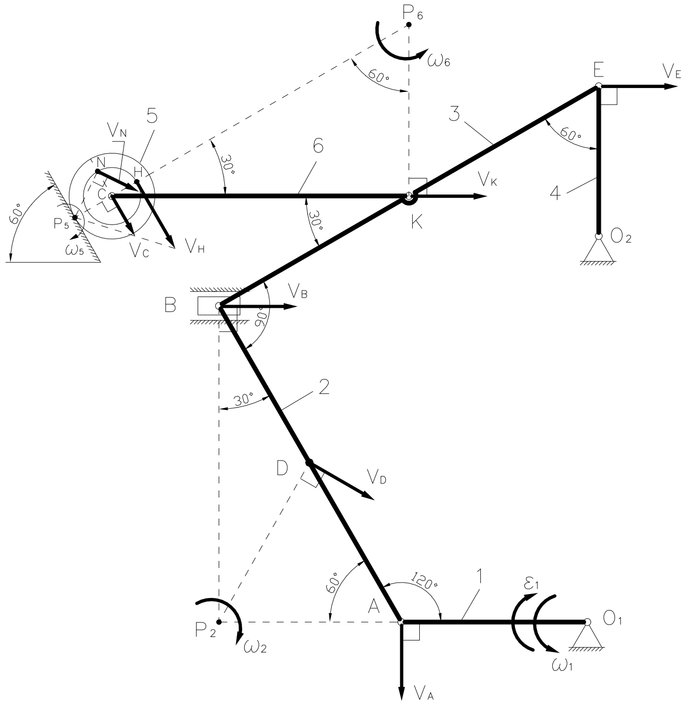


Рис.2.1

Для угловой скорости звена 2 можно записать:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{v_D}{DP_2} \tag{2.1}$$

Определим расстояния AP_2, BP_2, DP_2. Из треугольника ABP_2 найдем:

$AP_2 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}l_2, \;\; AP_2 = 0{,}5$ м как сторона лежащая против угла 30°,

$BP_2 = AB \cdot \cos 30^\circ = l_2 \cdot \cos 30^\circ, \;\; BP_2 = 0{,}866$ м.

Т.к. точка D лежит посередине AB, то $AD = \frac{1}{2}AB = AP_2$, и поскольку угол при вершине A равен 60°, значит треугольник ADP_2 равносторонний, следовательно $DP_2 = AD = AP_2 = 0{,}5$ м.

Теперь из формулы (1.8) найдем ω_2, v_B, v_D:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2}, \ \ \omega_2 = 8 \text{ с}^{-1},$$

$$v_B = \omega_2 \cdot BP_2, \ \ v_B = 6{,}9 \text{ м/с},$$

$$v_D = \omega_2 \cdot DP_2, \ \ v_D = 4 \text{ м/с}.$$

Перейдем к рассмотрению звена 3.

Точка E принадлежит одновременно звеньям 3 и 4 и вместе с последним совершает вращательное движение вокруг точки O_2, значит её скорость направлена перпендикулярно EO_2.

Так как скорости $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_E$ параллельны, то и перпендикуляры к ним также параллельны, следовательно, МЦС звена 3 лежит в бесконечности и движение будет мгновенно поступательным, значит, скорости всех точек звена 3, в данный момент времени, имеют одинаковое направление и числено равны, а угловая скорость равна нулю.

$$v_B = v_E = v_K = 6{,}9 \text{ м/с},$$

$$\omega_3 = 0.$$

Зная v_E, найдем угловую скорость звена 4:

$$\omega_4 = \frac{v_E}{EO_2} = \frac{v_E}{l_4}, \ \ \omega_4 = 17{,}25 \text{ с}^{-1}.$$

Рассмотрим звено 6. Скорость точки C направлена параллельно поверхности, по которой движется колесо. На пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{v}_K$ и $\vec{v}_C$ получим точку P_6 – МЦС звена 6.

Для угловой скорости звена 6, запишем:

$$\omega_6 = \frac{v_K}{KP_6} = \frac{v_C}{CP_6},$$

отсюда выразим v_C:

$$v_C = \frac{CP_6}{KP_6} \cdot v_K. \qquad (2.2)$$

Из треугольника KCP_6 найдем соотношение между сторонами CP_6 и KP_6:

$KP_6 = \dfrac{1}{2} CP_2$ как катет лежащий против угла 30°, подставляя это в (2.2), найдем:

$$v_C = 2 \cdot v_K, \;\; v_C = 13{,}8 \text{ м/с}.$$

МЦС звена 5 находится в точке соприкосновения колеса и поверхности – точка P_5. Скорость точки *N* будет направлена перпендикулярно NP_5, а скорость точки *H* – перпендикулярно HP_5, в соответствии с направлением вращения колеса. Для угловой скорости звена *5*, запишем:

$$\omega_5 = \frac{v_C}{CP_5} = \frac{v_N}{NP_5} = \frac{v_H}{HP_5}. \qquad (2.3)$$

Определим расстояния CP_5, NP_5, HP_5:

$$CP_5 = R_5, \;\; CP_5 = 0{,}12 \text{ м},$$

$$NP_5 = \sqrt{R_5^2 + r_5^2}, \;\; CP_5 = 0{,}144 \text{ м},$$

$$HP_5 = R_5 + r_5, \;\; HP_5 = 0{,}2 \text{ м},$$

Подставляя эти значения в (2.3), найдем ω_5, v_N, v_H:

$$\omega_5 = \frac{v_C}{CP_5}, \;\; \omega_5 = 115 \text{ с}^{-1},$$

$$v_N = \omega_5 \cdot NP_5, \;\; v_N = 16{,}56 \text{ м/с},$$

$$v_H = \omega_5 \cdot HP_5, \;\; v_H = 23 \text{ м/с}.$$

Теперь перейдем к нахождению ускорения точки *B*.

Выбрав в качестве полюса точку *A*, ускорения точки *B* можно найти по формуле:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \qquad (2.4)$$

здесь $\vec{a}_A$ – ускорение полюса, $\vec{a}_{BA}$ – ускорение, которое получает точка *B* при вращении вокруг полюса.

Разложив эти ускорения на тангенциальную и нормальную составляющие, формула (1.11) примет вид:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \qquad (2.5)$$

Так как точка *A* вместе со звеном 1 совершает вращение вокруг O_1, то $\vec{a}_A^n$ направлено от точки *A* к O_1, $\vec{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1, в соответствии с направлением углового ускорения звена 1 (рис. 2.2). Численные значения этих ускорений находятся по формулам:

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot AO_1 = \omega_1^2 \cdot l_1,\ a_A^n = 32 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot AO_1 = \varepsilon_1 \cdot l_1,\ a_A^\tau = 1 \text{ м/с}^2.$$

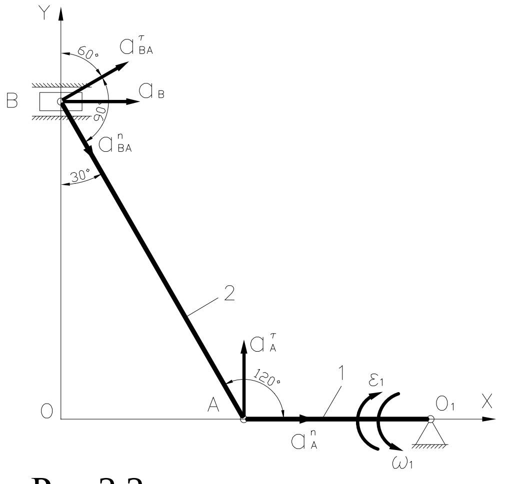


Рис.2.2

Ускорение $\vec{a}_{BA}^n$ направлено от точки *B* к точке *A*, $\vec{a}_{BA}^\tau$ направлено перпендикулярно *AB* (направление этого ускорения заранее неизвестно, т.к. неизвестно направление ε_{AB}, поэтому направить его можно в любую сторону, неверно выбранное направление отразится лишь на знаке ускорения). Найдем численное значение $\vec{a}_{BA}^n$:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = \omega_2^2 \cdot l_2,\ a_{BA}^n = 64 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки *B*, так как она принадлежит ползуну, будет направлено параллельно направляющим ползуна. Чтобы найти его, запишем уравнение (2.5) в проекциях на выбранные оси координат:

$$OX:\ a_B = a_A^n + a_{BA}^n \cdot \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau \cdot \sin 60^\circ, \qquad (2.6)$$

$$OY:\ 0 = a_A^\tau - a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ + a_{BA}^\tau \cdot \cos 60^\circ. \qquad (2.7)$$

Из (1.14) найдем a_{BA}^τ:

$$a_{BA}^\tau = \frac{a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ - a_A^\tau}{\cos 60^\circ},\ a_{BA}^\tau = 108{,}85 \text{ м/с}^2.$$

Подставляя полученное значение в (2.6), найдем:

$$a_B = 158{,}27 \text{ м/с}^2.$$

Зная a_{BA}^τ, определим угловое ускорение звена *AB*:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{l_2},\ \varepsilon_2 = 108{,}85 \text{ с}^{-2}.$$

<u>Ответ</u>: $v_A = 4$ м/с, $v_B = 13{,}8$ м/с, $v_D = 4$ м/с, $v_E = 6{,}9$ м/с,

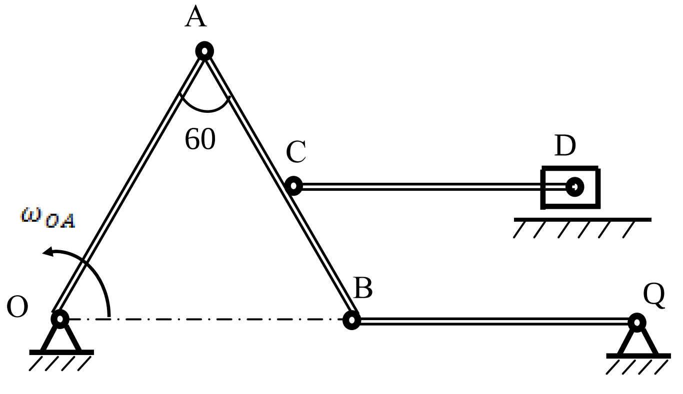
$v_K = 6{,}9$ м/с, $v_C = 13{,}8$ м/с, $v_N = 16{,}56$ м/с, $v_H = 23$ м/с,

$\omega_2 = 8 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3 = 0 \text{ с}^{-1}$, $\omega_4 = 17{,}25 \text{ с}^{-1}$, $\omega_5 = 115 \text{ с}^{-1}$,

$a_B = 158{,}27 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon_2 = 108{,}85 \text{ с}^{-2}$.

2.2 Примерный перечень вопросов для защиты РГР №2

1. Дайте определение плоскопараллельного движения.
2. Запишите теорему о проекциях скоростей двух точек.
3. Что называют мгновенным центром скоростей (МЦС)?
4. Как определить положения МЦС?
5. Запишите формулу определения скорости произвольной точки при плоском движении.
6. Запишите формулу определения ускорения произвольной точки при плоском движении.
7. Определите скорости точек A, B, C, D и угловые скорости звеньев AB и CD. $OA = AB = BQ = CD = 1$ м, $AC = CB$, $\omega_{OA} = 4\ c^{-1}$.



3 РГР №3 «Исследование движения механической системы с использованием теоремы об изменении кинетической энергии»

Механическая система с одной степенью свободы (рис. Д.1-Д.30), состоящая из трех абсолютно твердых тел (тело 1 движется поступательно по наклонной плоскости под углом α к горизонту, тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, а тело 3 катится без скольжения по наклонной плоскости под углом β к горизонту). Тела соединены между собой нерастяжимыми невесомыми нитями. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы F или момента M. Определить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии скорость одного из тел механической системы или скорость центра масс C тела 3 (в зависимости от варианта) к моменту времени, когда тело 1 переместится на расстояние S. Для всех вариантов коэффициент трение скольжения груза 1 о плоскость принять равным $f = 0{,}1$, коэффициент трения качения тела 3 принять равным $k = 0{,}01$ м. Данные, необходимые для решения задачи, приведены в таблице 3.1.

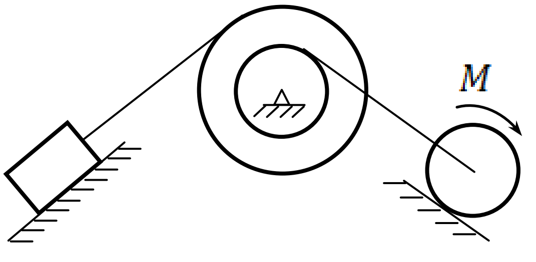


Рис. Д.1

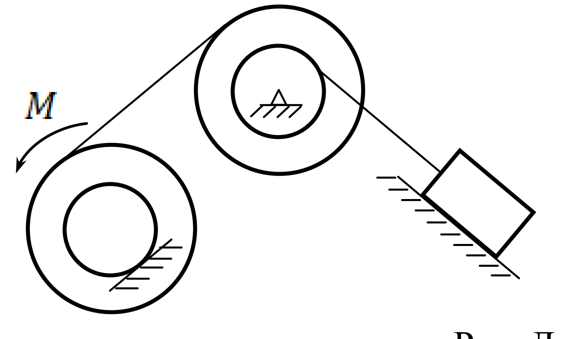


Рис. Д.2

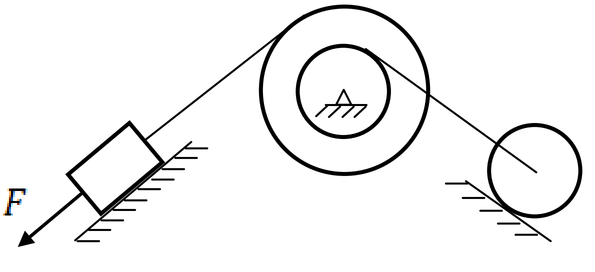


Рис. Д.3

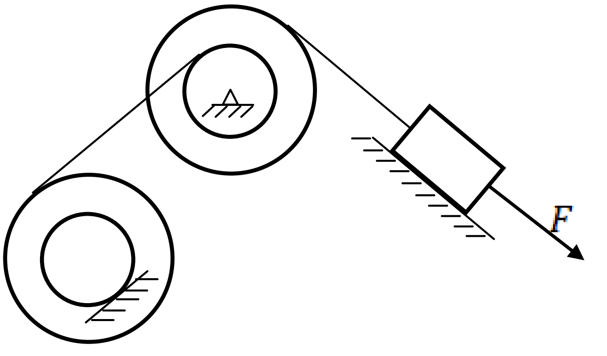


Рис. Д.4

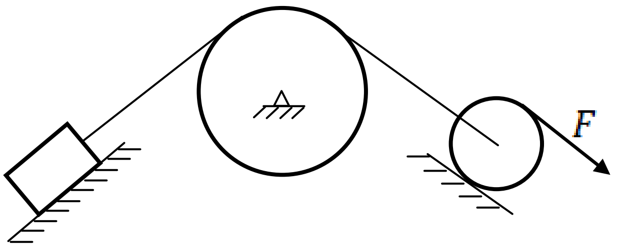


Рис. Д.5

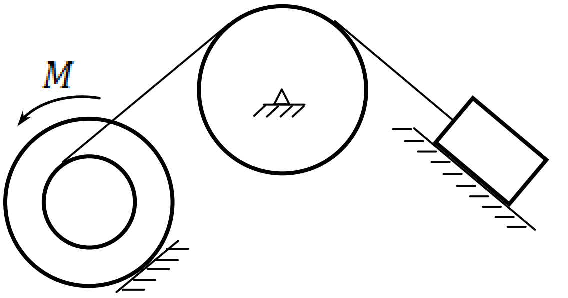


Рис. Д.6

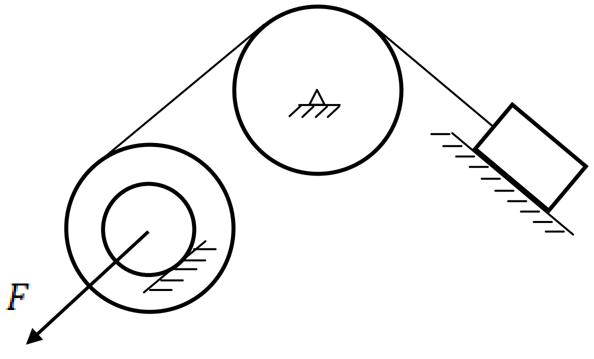


Рис. Д.7

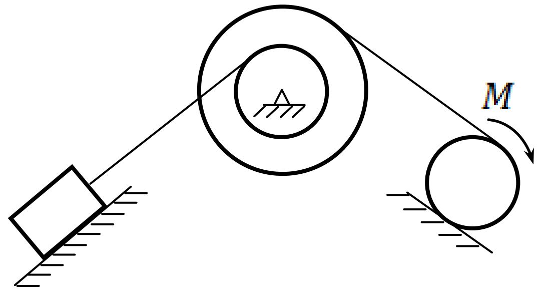


Рис. Д.8

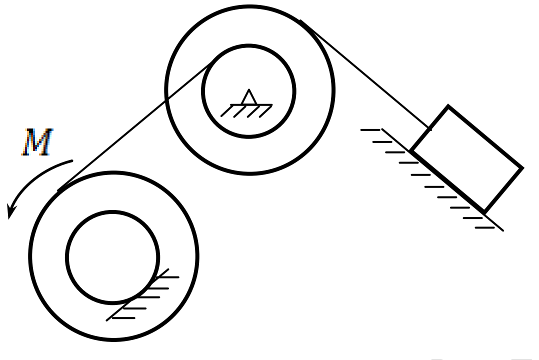


Рис. Д.9

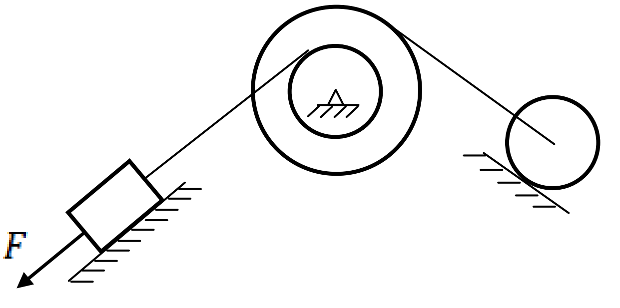


Рис. Д.10

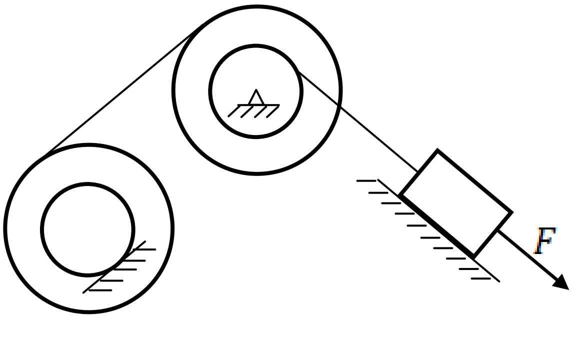


Рис. Д.11

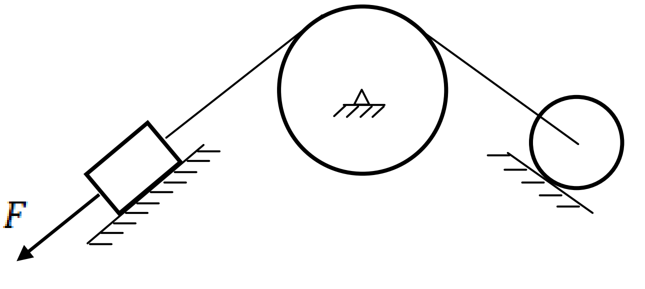


Рис. Д.12

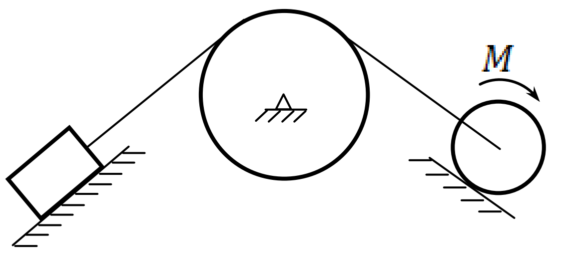


Рис. Д.13

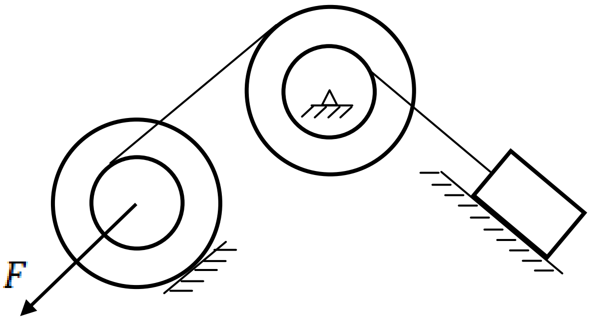


Рис. Д.14

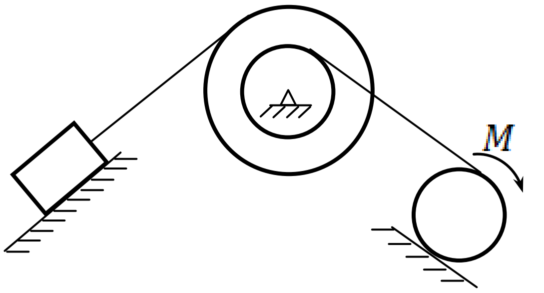


Рис. Д.15

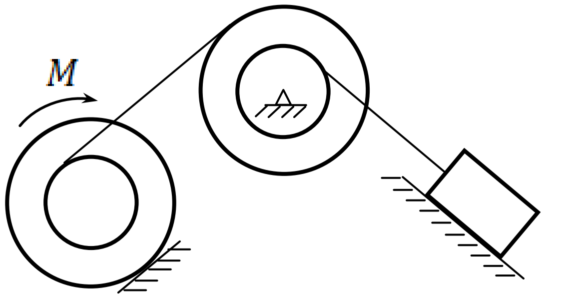


Рис. Д.16

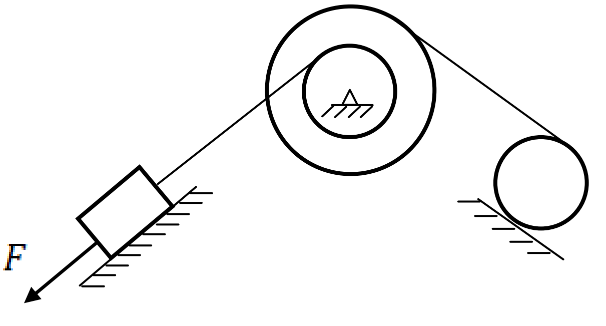


Рис. Д.17

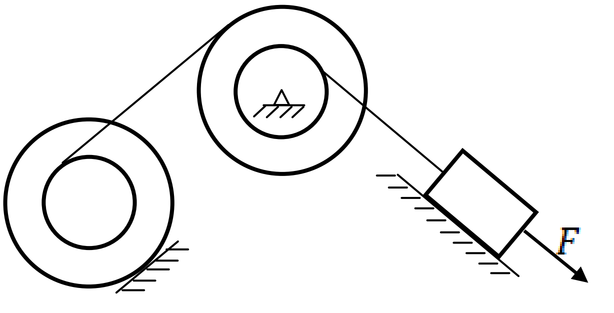


Рис. Д.18

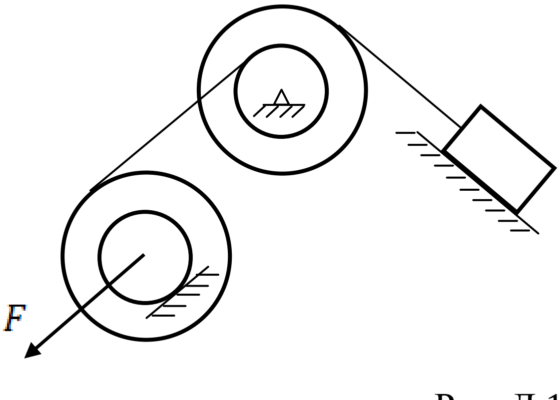


Рис. Д.19

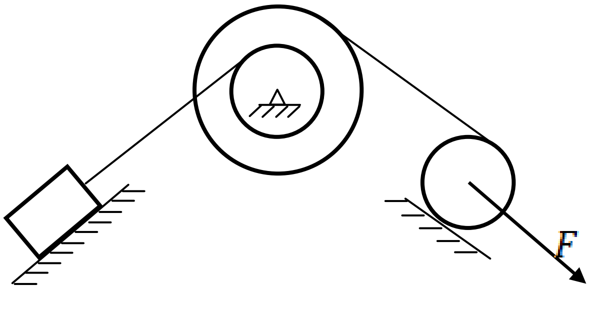


Рис. Д.20

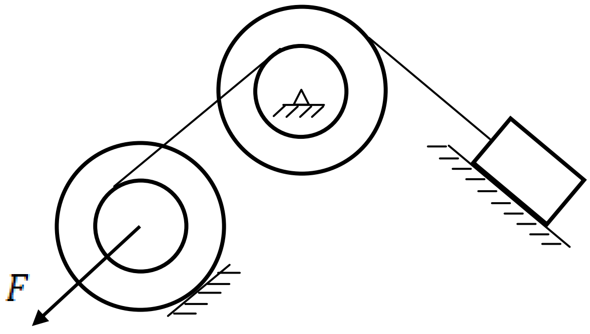


Рис. Д.21

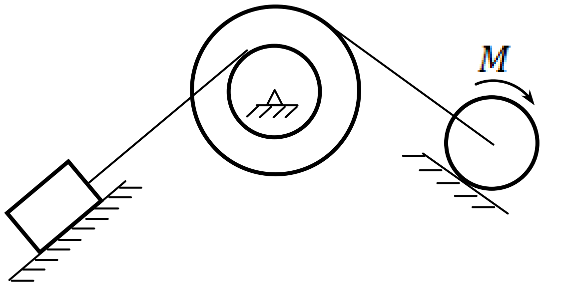


Рис. Д.22

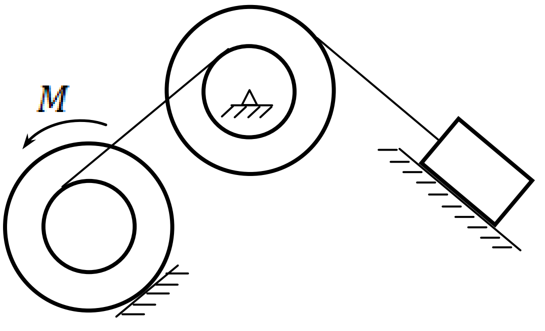


Рис. Д.23

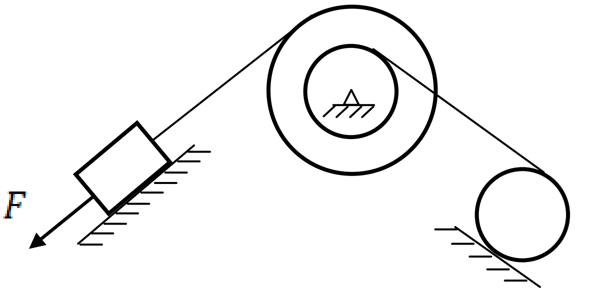


Рис. Д.24

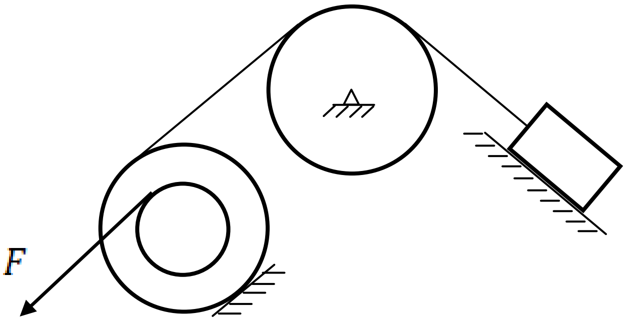


Рис. Д.25

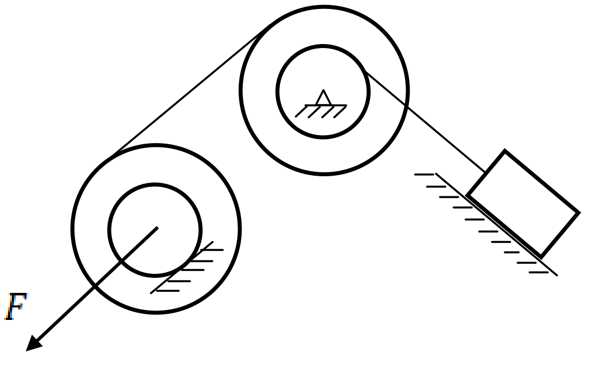


Рис. Д.26

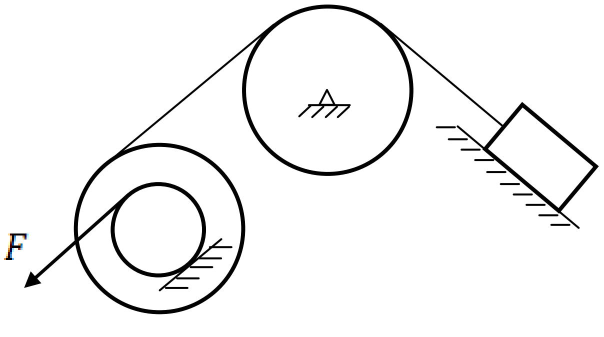


Рис. Д.27

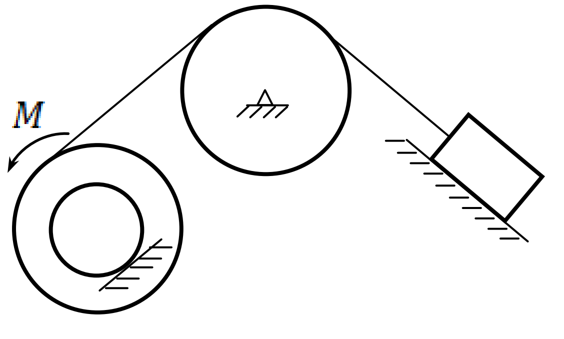


Рис. Д.28

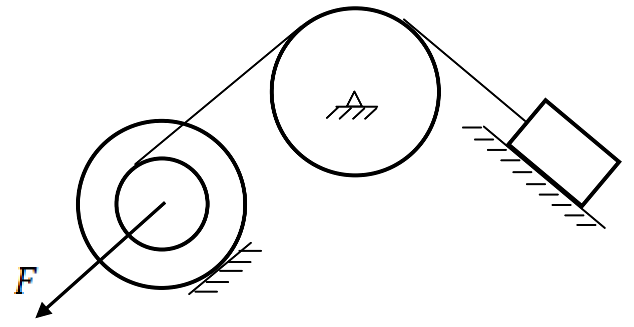


Рис. Д.29

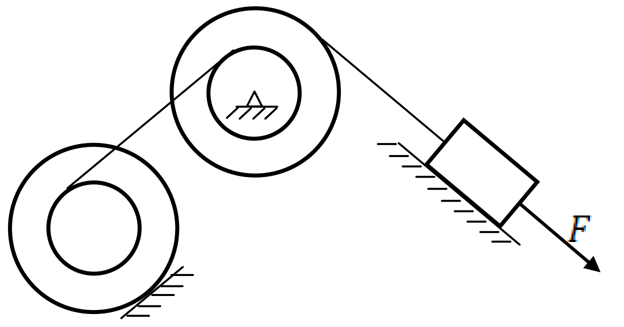


Рис. Д.30

Таблица 3.1

Величина		Вариант									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_1	кг	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
m_2	кг	20	25	30	40	40	45	45	50	55	60
m_3	кг	30	40	50	60	50	50	55	60	65	70
R_2	см	80	70	60	50	40	80	70	60	50	40
r_2	см	40	50	40	30	25	40	50	40	30	25
ρ_2	см	50	60	50	40	30	50	60	50	40	30
R_3	см	60	90	80	80	50	60	90	80	80	50
r_3	см	40	50	45	55	35	40	50	45	55	35
ρ_3	см	50	75	65	60	45	50	75	65	60	45
M	кНм	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	кН	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
α	градус	30	0	60	0	30	0	60	0	30	0
β	градус	0	60	0	30	0	60	0	30	0	60
S	см	30	40	50	60	50	50	55	60	65	70
Определить		v_1	ω_2	ω_3	v_C	v_1	ω_2	ω_3	v_C	v_1	ω_2

Примечание: Величины, отсутствующие на рисунке из таблицы 3.1 не выписывать: например, для рисунка 1 пропустить значения r_3, ρ_3 (тело 3 представляет собой однородный цилиндр радиуса R_3) и F (к телу 3 приложен движущий момент M), а для рисунка 4 нет необходимости выписывать значение момента M, так как к телу 1 приложена движущая сила F.

3.1 **Пример выполнения РГР №3.**

Механическая система с одной степенью свободы, состоит из трех абсолютно твердых тел, соединенных между собой нерастяжимыми невесомыми нитями (рис.3.1): тело 1 движется поступательно по наклонной плоскости под углом α к горизонту, тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, а тело 3 катится без скольжения по наклонной плоскости под углом β к горизонту. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы F, параллельной наклонной плоскости. Считая связи идеальными, определить с помощью теоремы об изменении кинетической энергии угловую скорость вращающегося тела 2 к моменту времени, когда тело 1 переместится на расстояние S по наклонной поверхности.

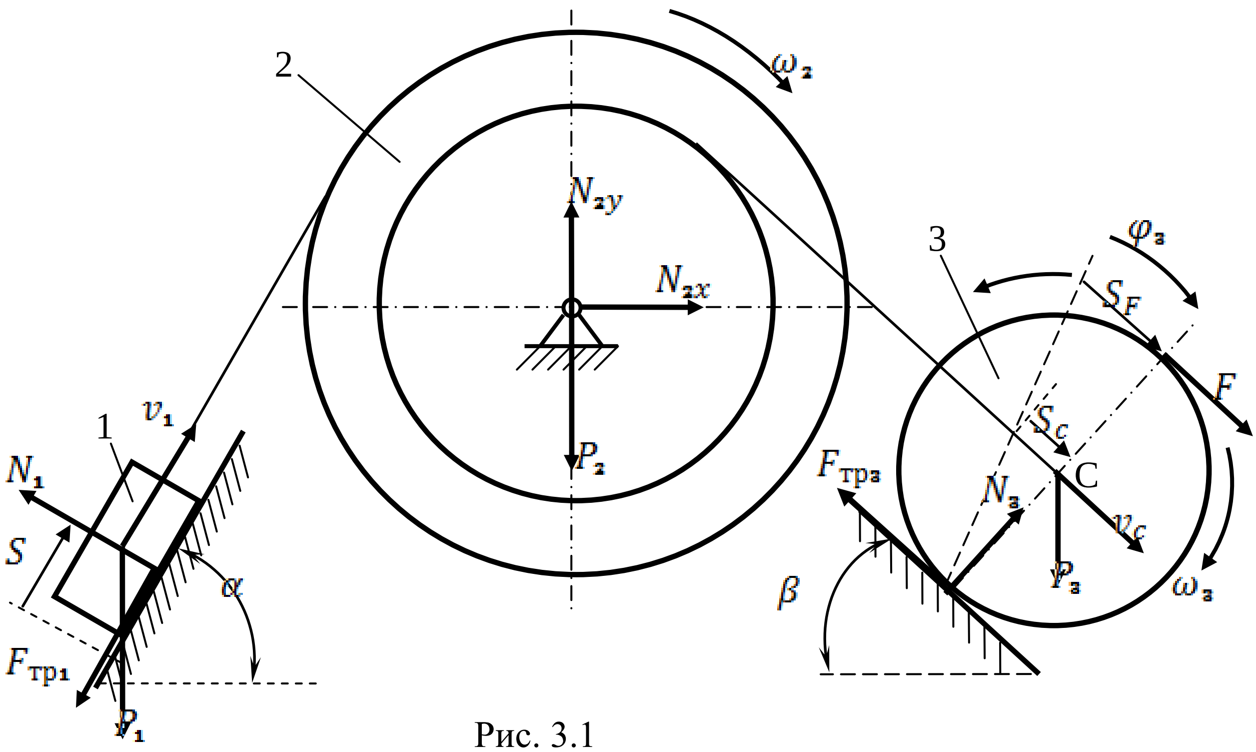


Рис. 3.1

Исходные данные: $m_1 = 4$ кг , $m_2 = 10$ кг , $m_3 = 8$ кг , $R_2 = 20$ см ,
$\rho_2 = 15$ см

$r_2 = 10$ см , , $R_3 = 16$ см , $F = 2$ кН , $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$,
$k = 0{,}01$ м , $f = 0{,}1$ $S = 50$ см . Определить угловую скорость второго тела ω_2.

Решение:

Применим для данной неизменяемой механической системы теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e$$, (3.1)

здесь начальная кинетическая энергия $T_0 = 0$, так как в начальный момент система находилась в покое. Конечная кинетическая энергия системы T равна сумме кинетических энергий всех тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (3.2)$$

$\sum A_k^e$ - сумма работ всех внешних сил, действующих на систему.

Поскольку, в задаче требуется определить угловую скорость второго тела, выразим скорости всех тел через ω_2

$$v_1 = \omega_2 R_2, \qquad (3.3a)$$

$$v_C = \omega_2 r_2, \qquad (3.3b)$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{R_3}. \qquad (3.3c)$$

Запишем формулы для вычисления кинетической энергии каждого тела механической системы, с учетом равенств (3.3). Первое тело движется поступательно. Кинетическая энергия в этом случае, вычисляется по формуле:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \omega_2^2 R_2^2}{2} \qquad (3.4)$$

Второе тело движется вращательно. Кинетическая энергия в этом случае, вычисляется по формуле:

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \rho_2^2 \omega_2^2}{2}, \qquad (3.5)$$

здесь учтено, что момент инерции второго тела (ступенчатого шкива с радиусом инерции ρ_2) равен $I_2 = m_2 \rho_2^2$.

Третье тело движется плоскопараллельно. Кинетическая энергия в этом случае, вычисляется по формуле:

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \omega_2^2 r_2^2}{2} + \frac{m_3 R_3^2 r_2^2 \omega_2^2}{4R_3^2} = \frac{3 m_3 \omega_2^2 r_2^2}{4} \qquad (3.6)$$

здесь учтено, что момент инерции третьего тела (однородного цилиндра) равен $I_3 = m_3 R_3^2$.

Подставляя (3.4)-(3.6) в (3.2) найдем кинетическую энергию системы.

$$T = \frac{\omega_2^2}{2}\left(m_1 R_2^2 + m_2 \rho_2^2 + \frac{3}{2} m_3 r_2^2\right) \qquad (3.7)$$

Найдем работы всех внешних сил. Работа реакции N_1 равна нулю, так как она перпендикулярна перемещению S. Работы сил P_2, N_2, N_3 и $F_{тр3}$ так же равны нулю, поскольку силы приложены в неподвижных точках. Выразим перемещения S_F и S_C через известное S, с учетом того, что соотношения между перемещениями точно такие же, как и между соответствующими скоростями (3.3)

$$S = \varphi_2 R_2, \qquad (3.8a)$$

$$S_C = \varphi_2 r_2, \qquad (3.8b)$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 r_2}{R_3}. \qquad (3.8c)$$

Из (3.8a) и (3.8b) находим

$$S_C = \frac{S r_2}{R_2}, \qquad (3.9a)$$

тогда

$$S_F = 2S_C = \frac{2S r_2}{R_2}, \qquad (3.9b)$$

$$\varphi_3 = \frac{S r_2}{R_2 R_3}. \qquad (3.9c)$$

Выражения для работ сил тяжести P_1, P_3, сил F, $F_{тр1}$ и момента с учетом (3.9), примут вид:

$$A(P_1) = -P_1 S \sin\alpha,$$

$$A(P_3) = P_3 S_C \sin\beta = P_3 \frac{S r_2}{R_2} \sin\beta,$$

$$A(F) = F S_F = F \frac{2S r_2}{R_2},$$

,

.

Запишем суммарную работу всех внешних сил

$$\Sigma A_k^e = S\left(\frac{r_2}{R_2}\left(2F + P_3 \sin\beta - P_3 \frac{k}{R_3} \cos\beta\right) - P_1 \left(\sin\alpha + f \cos(\alpha)\right)\right) \qquad (3.10)$$

Подставим (3.13) и (3.7) в теорему (3.1), получим

$$\frac{\omega_2^2}{2}\left(m_1 R_2^2 + m_2 \rho_2^2 + \frac{3}{2} m_3 r_2^2\right) = S\left(\frac{r_2}{R_2}\left(2F + P_3 \sin\beta - P_3 \frac{k}{R_3} \cos\beta\right) - P_1 \left(\sin\alpha + f \cos(\alpha)\right)\right)$$

,

Выразим отсюда ω_2

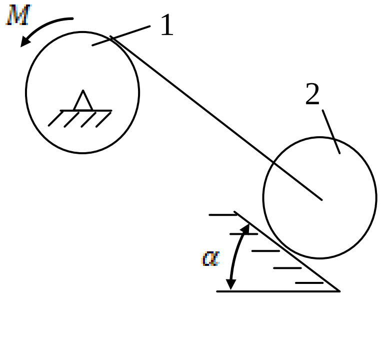
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2S\left(\frac{r_2}{R_2}\left(2F + P_3 \sin\beta - P_3 \frac{k}{R_3}\cos\beta\right) - P_1\left(\sin\alpha + f\cos(\alpha)\right)\right)}{m_1 R_2^2 + m_2 \rho_2^2 + \frac{3}{2} m_3 r_2^2}}$$

Подставляя числовые значения заданных величин, найдем

$\omega_2 = 62{,}86$ с$^{-1}$

3.2 Примерный перечень вопросов для защиты РГР №3

1. Запишите теорему об изменении кинетической энергии.
2. Какая система называется неизменяемой?
3. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия при поступательном движении?
4. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия при вращательном движении?
5. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия при плоскопараллельном движении?
6. Запишите формулу, для вычисления работы постоянной силы.
7. Запишите формулу, для вычисления работы постоянного момента силы.
8. Что называют моментом инерции тела?
9. Как вычисляется момент инерции однородного диска?
10. Что называют радиусом инерции?
11. При помощи теоремы об изменении кинетической энергии определить скорость первого тела ω_1, после того как оно повернется на угол $\varphi_1 = 2\pi$ рад , если $m_1 = 5$ кг , $m_2 = 10$ кг , $R_1 = 20$ см , $R_2 = 15$ см , $M = 200$ Нм , $\alpha = 45°$.



4 Критерии и шкала оценивания РГР.

Оценка	*Критерии оценки*
Отлично	РГР выполнена полностью, без ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием непонимания материала). Содержание работы полностью соответствует заданию. Структура работы логически и

	методически выдержана. Оформление работы отвечает предъявляемым требованиям. При защите работы обучающийся правильно и уверенно отвечает на вопросы преподавателя, демонстрирует глубокое знание теоретического материала, способен аргументировать собственные утверждения и выводы.
Хорошо	РГР выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна негрубая ошибка или два-три недочета, не влияющих на правильную последовательность рассуждений. Содержание работы полностью соответствует заданию. Структура работы логически и методически выдержана. Оформление работы в целом отвечает предъявляемым требованиям. При защите работы обучающийся правильно и уверенно отвечает на большинство вопросов преподавателя, демонстрирует хорошее знание теоретического материала, но не всегда способен аргументировать собственные утверждения и выводы. При наводящих вопросах преподавателя исправляет ошибки в ответе.
Удовлетворительно	В РГР допущено более одной грубой ошибки или более двух-трех недочета, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме. Содержание работы частично не соответствует заданию. Оформление работы в целом отвечает предъявляемым требованиям. При защите работы обучающийся допускает ошибки при ответах на вопросы преподавателя, демонстрирует слабое знание теоретического материала, в большинстве случаев не способен уверенно аргументировать собственные утверждения и выводы.
Неудовлетворительно	В РГР допущено большое количество существенных ошибок по сути работы. Содержание работы не соответствует заданию. Оформление работы не отвечает предъявляемым требованиям. ИЛИ Расчетно-графическая работа не представлена преподавателю. При защите РГР обучающийся демонстрирует слабое понимание программного материала.

5 Требования к оформлению РГР.

Расчетно-пояснительная записка выполняется на стандартных листах формата А4 (210 мм × 297 мм). Листы должны быть пронумерованы и сшиты в тетрадь.

Первый лист – титульный (см. приложение 1). На втором листе выполняется основная надпись по форме 2 (см. приложение 2) и помещается оглавление, которое содержит название всех разделов и подразделов пояснительной записки с указанием страниц. Разделы и подразделы нумеруются арабскими цифрами. В качестве примера – см. оглавление в настоящих методических указаниях. На третьем и последующих листах выполняется основная надпись по форме 2а (см. приложение 3). На последнем листе приводится список литературы, составленный в алфавитном порядке в соответствии с правилами библиографического описания.

Текст выполняется на одной стороне листа. Формулы и расчеты записываются в отдельные строки. Сначала формула должна быть записана в буквенном виде, затем в нее вместо букв подставляются численные значения (без каких-либо алгебраических преобразований), затем записывается результат с указанием размерности полученной величины, например:

$$T_1 = P_1/\omega_1 = (5{,}58 \cdot 10^3)/151{,}2 = 36{,}9 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Каждая формула должна сопровождаться расшифровкой входящих в нее обозначений.

Расчеты следует при необходимости сопровождать эскизами деталей, схемами нагружения, эпюрами внутренних силовых факторов и т.п. Количество рисунков должно быть достаточным для пояснения текста пояснительной записки и расчетов.

6 Приложения

Приложение 1

Пример оформления титульного листа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Кафедра технической механiки
и инженерной графики

Равновесие плоской системы сил
Расчетно-графическая работа №1
по дисциплине
«Теоретическая механика»

Выполнил: студент группы Элб16о
Иванов М. А.
Шифр: Элб16о-108
Проверил: доцент кафедры ТМ и ИГ
Петров А. В.

МУРМАНСК

2018

Приложение 2

Основная надпись для текстовых документов
по ГОСТ 2.104-68 (форма 2)

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата				
Разраб.						Лит.	Лист	Листов
Пров.								
Н.контр.								
Утв.								

Приложение 3

Основная надпись для текстовых документов
по ГОСТ 2.104-68 (форма 2а)

						Лист
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		

7 Литература

1. Диевский, В. А. Теоретическая механика : учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений, обучающихся по направлению подгот. "Прикладная механика" / В. А. Диевский. - Изд. 4-е, испр. и доп. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2016. - 329 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики : учебник для втузов / С. М. Тарг. - Изд. 16-е, стер. ; 14-е изд., стер. ; 13-е изд., стер. - Москва : Высш. шк., 2006, 2004, 2003. - 416 с.
3. Диевский, В. А. Теоретическая механика. Сборник заданий : учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений. обучающихся по направлению подгот. "Прикладная механика" / В. А. Диевский, И. А. Малышева. - Изд. 3-е, испр. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2016. - 190, [1] с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для втузов / А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др. ; под общ. ред. А. А. Яблонского. - 11-е изд., стер. ; 10-е изд., стер. - Москва : Интеграл-Пресс, 2004, 2003. - 382 с.
5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: Статика. Кинематика. Динамика : учебник для вузов / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. - 8-е изд., стер. ; 9-е изд., стер. - Москва : Лань, 2004, 2002, 2001. - 768 с.
6. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики : учеб. пособие для вузов. В 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. - Изд. 11-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2009. - 729 с.
7. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для вузов / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. - Изд. 49-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2008. - 447, [1] с.
8. Сборник коротких задач по теоретической механике : учеб. пособие для вузов / [О. Э. Кепе и др.] ; под ред. О. Э. Кепе. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2009, 2008. - 367, [1] с.